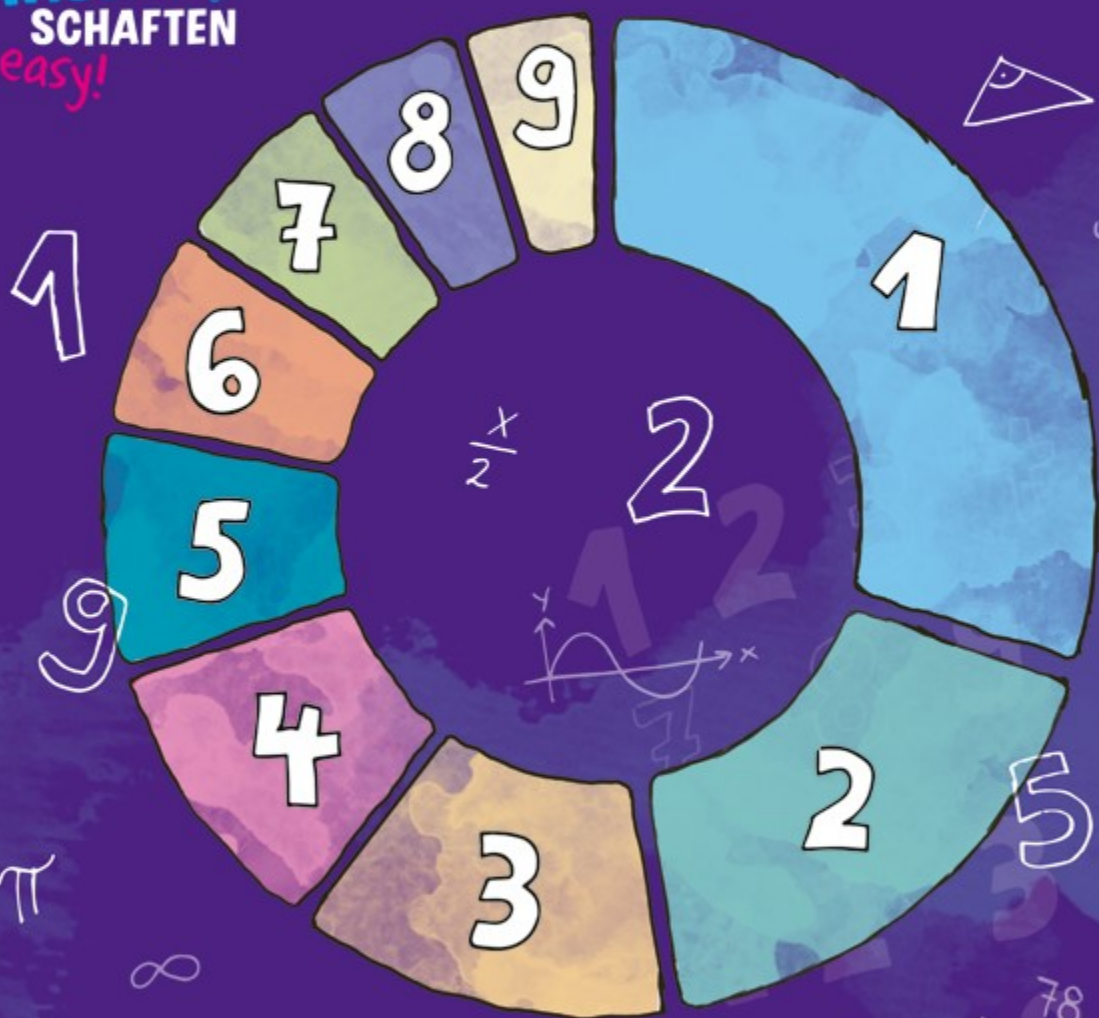


**WAS
IST
WAS**

ALLES IST ZAHL!

NATUR
WISSEN
SCHAFTEN
easy!

Natürlich, irrational
und unendlich



**LOGO
IST
ALLES
LOGISCH**

**VON
WINZIGKLEIN
BIS
RIESEN-
GROSS**

**MATHE
IST
ÜBER-
ALL**



TESSLOFF



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



Arithmetik

Welche Zahlen gibt es? Neben den ganzen Zahlen geht es um Brüche, Wurzeln und kompliziertere Zahlen. Die Arithmetik befasst sich mit den Gesetzen, die beim Rechnen mit diesen Zahlen gelten.

Zahlentheorie

Welche Eigenschaften haben die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 und so weiter? Welche Regeln zu ihrer Teilbarkeit gibt es? Und welche Eigenschaften haben die sogenannte Primzahlen, also die Zahlen, die nur durch sich selbst und 1 ohne Rest teilbar sind?

Algebra

Wie kann man Gleichungen lösen und gibt es Verfahren, die immer funktionieren? Abstrakter wird es bei der sogenannten höheren Algebra, die strukturelle Zusammenhänge zwischen Größen untersucht. Obwohl sie sehr abgehoben wirkt, wird sie häufig in der Physik eingesetzt.

Analysis

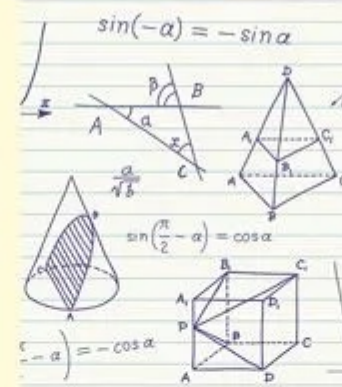
Dieses Teilgebiet befasst sich mit Grenzwerten. In seinem Mittelpunkt stehen die Differential- und die Integralrechnung, die an Schulen in der Oberstufe unterrichtet werden. Dabei geht es darum, Bewegungen wie Flugkurven mathematisch zu beschreiben.

Woraus besteht Mathe?

Wenn du 2898 durch 63 ohne Papier und Stift dividieren kannst, bist du super im Kopfrechnen. Aber als mathematische Leistung gilt das nicht. Zu erkennen, dass es keine größte Zahl geben kann, hingegen schon. Überlegst du dir, dass man zu jeder Zahl 1 dazu addieren kann und so eine größere Zahl erhält, es daher also keine größte Zahl geben kann, dann machst du Mathematik. Denn anders als beim Rechnen hast du nicht nur auswendig gelernte Regeln angewandt, sondern einen logischen Schluss gezogen. Und genau darum geht es in Mathe: Wie kann man aus gegebenen Voraussetzungen alle möglichen Folgerungen herleiten? Ein wesentlicher Punkt bei der Mathematik ist die Abstraktion. Hier ein Beispiel dazu, denn das geht schon mit den Zahlen los: Die Zahl 3 etwa ist unabhängig von dem, was gezählt wird. 3 Äpfel, 3 Birnen, 3 Menschen oder 3 Eigenschaften – die einzige Gemeinsamkeit ist die Anzahl. Jeder andere Inhalt wird ausgeblendet.

Nicht reale Dinge, sondern Ideen

Mit Zahlen beschäftigen sich die Gelehrten schon seit Jahrtausenden. In den vergangenen Jahrhunderten kamen zahlreiche weitere mathematische Objekte dazu: zum Beispiel Geraden, Kreise, Funktionen, Integrale oder Wahrscheinlichkeiten. Gleichzeitig entfaltete sich das Fach in viele Teilgebiete. Heute kann es keinem noch so genialen Menschen gelingen, alle diese Gebiete zu beherrschen. Dafür hat sich die Forschung viel zu sehr spezialisiert.



Geometrie

Welchen Flächeninhalt haben Figuren in der Ebene, welches Volumen Körper im Raum? Wann sind sich zwei Figuren ähnlich? Wie kann man die Winkel in einem Dreieck berechnen? Bereits in der Antike studierten die Gelehrten ausführlich die Geometrie.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aus der Untersuchung des Glücksspiels heraus hat sich dieses Teilgebiet entwickelt. Wie kann man berechnen, wie wahrscheinlich ein bestimmtes Ereignis eintritt? Beispiele: Das Würfeln von mehreren Sechsern, fünf Richtige im Lotto oder ein Schadensfall bei einer Haftpflichtversicherung.

Statistik

Wie kann man aus der Untersuchung von wenigen Fällen auf allgemein gültige Zusammenhänge schließen? Vor politischen Wahlen etwa werden ein paar tausend Bürger gefragt, wo sie ihr Kreuz machen. Daraus rechnen Institute hoch, welches Ergebnis bei der Wahl zu erwarten ist.

Der Blick fürs Wesentliche

Mathematische Objekte sind keine realen Dinge, sondern Ideen. Redet etwa ein Mathematiker von einem Kreis, so meint er damit nicht einen Strich auf einem Stück Papier, sondern die Vorstellung aller Punkte, die vom Mittelpunkt den gleichen Abstand haben. Er sieht also von allem ab, was nicht zwingend zur Idee eines Kreises dazugehört, und konzentriert sich nur auf die wesentlichen Eigenschaften.

Angewandte Mathematik

Wie lässt sich mit den theoretischen Erkenntnissen der Mathematik die Wirklichkeit berechnen? Mathematische Theorien sind oft so abstrakt, dass sie sich nicht direkt auf reale Probleme anwenden lassen. Diese Lücke soll die Angewandte Mathematik schließen.

Optimierung

Wie lässt sich unter gegebenen Voraussetzungen die bestmögliche Lösung finden? Ein berühmtes Beispiel ist das sogenannte Problem des Handlungsreisenden: Wie kann man den kürzesten Weg berechnen, auf dem ein Reisender eine bestimmte Anzahl von Städten besuchen kann?

Spieltheorie

Weder um Glücks- noch um Denkspiele geht es bei dieser Teildisziplin. Vielmehr untersucht sie rationales Verhalten in menschlichen Konflikten. Wie kann man zum Beispiel in Verhandlungen sein Ziel erreichen, wenn auch die andere Seite ihre Ziele verfolgt? Welche Strategien erweisen sich als erfolgreich?



Die Königin der Wissenschaften

Die Mathematik gilt bei vielen Menschen als die Königin der Wissenschaften. Denn im Vergleich zu allen anderen Disziplinen gelten bei ihr einmal als richtig erkannte Zusammenhänge für immer. Was einmal bewiesen wurde, gilt also für die Ewigkeit! $3 \text{ mal } 3$ ist ein für alle Mal 9 . Und die Winkel eines Dreiecks ergeben zusammen gerechnet 180 Grad, im Altertum genauso wie im nächsten Jahrhundert. Das gibt es in keiner anderen Wissenschaft. Ganz schön cool, oder?

Nur Beweise zählen

In anderen Fächern wie Physik, Chemie, Biologie oder Soziologie gelten Theorien als richtig, wenn viele Beobachtungen und Versuchsergebnisse für sie vorhanden sind. Stehen neue Erkenntnisse im Widerspruch zu alten Theorien, verwerfen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler das bisher Gültige und formulieren neue Behauptungen. So widerlegte etwa Isaac Newton im 17. Jahrhundert so manche physikalische Theorie, die seit der Antike galt. Ungefähr 200 Jahre später wiederum zeigten Albert Einstein und andere der Newton'schen Physik ihre Grenzen auf. In der Mathematik zählen hingegen Beobachtungen und Versuche nicht. Hier gilt ein Satz nur dann als wahr, wenn er mit logischen Überlegungen bewiesen wurde.



Alles logisch?!

Kann man mit Dominosteinen ein Schachbrett ohne zwei gegenüberliegende Eckfelder vollständig abdecken?

Die Kraft des logischen Denkens

Um den Unterschied besser zu verstehen, kommt hier ein Beispiel: Ein Schachbrett hat $8 \text{ mal } 8$, also 64 Felder. Nehmen wir zwei gegenüber liegende Eckfelder weg, bleiben 62 Felder übrig. Und jetzt folgende Frage: Kannst du diese 62 Felder mit 31 Dominosteinen, die jeweils die Größe von zwei Feldern haben, vollständig überdecken? Gehst du so vor, wie es in den meisten Naturwissenschaften üblich ist, fängst du an, die Dominosteine in verschiedenen Anordnungen auszulegen. Nach einigen vergeblichen

Versuchen kommst du dann zu dem Schluss, dass die Aufgabe nicht zu lösen ist. Da es viele Millionen verschiedener Anordnungen gibt, kannst du dir aber nie ganz sicher sein, ob du die richtige übersehen hast. Der Gedanke kann frustrierend sein. Aber vielleicht findet ja doch noch jemand eine Lösung. Eine Mathematikerin oder ein Mathematiker geht die Sache prinzipieller an und überlegt sich, dass zwei gegenüber liegende Eckfelder immer dieselbe Farbe haben. Daher bleiben bei den 62 Feldern entweder 30 weiße und 32 schwarze übrig oder andersherum 32 weiße und 30 schwarze. Ein Dominostein bedeckt zwei benachbarte Felder. Die haben immer verschiedene Farben. Daher bedecken 31 Dominosteine immer 31 weiße und 31 schwarze Felder. Also kann keine einzige der vielen Millionen möglicher Anordnungen alle 62 Felder bedecken. Klingt eigentlich ganz logisch, oder?

Kurz und knapp

Naturwissenschaftlerinnen machen Versuche und leiten daraus allgemeine Regeln ab. Mathematiker vertrauen nur auf die Kraft des Denkens. Was kann logisch aus den Voraussetzungen gefolgert werden?

Keine Wissenschaft ohne Mathe

Die Mathematik geht zwar anders vor als alle anderen Fächer. Dennoch kommt kaum eine Wissenschaft heute ohne sie aus. Die Physik versucht schon immer, die Welt in Formeln auszudrücken. In der Biologie wird an Rechenmodellen gearbeitet, um vorherzusagen, welche Tierarten vom Aussterben gefährdet sind. Und die Vererbungslehre wäre ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung bis heute unbekannt. In der Medizin berechnen Fachleute die Ausbreitung ansteckender Krankheiten. Selbst in den sogenannten Geisteswissenschaften wie Soziologie, Politologie oder Philosophie nehmen mathematischen Verfahren stark zu.



Schwarze Schafe

Den Unterschied zwischen Mathematik und anderen Wissenschaften verdeutlicht folgender Witz: Ein Ingenieur, eine Physikerin und ein Mathematiker fahren mit dem Zug nach Frankreich. Nach der Grenze sehen sie durchs Zugfenster ein schwarzes Schaf. Darauf sagt der Ingenieur: »Sieh an, in Frankreich sind die Schafe schwarz.« Die Physikerin verbessert ihn: »In Frankreich gibt es mindestens ein schwarzes Schaf.« Daraufhin der Mathematiker: »Nein, werter Kollege und werte Kollegin. Wir wissen nur: in Frankreich gibt es mindestens ein Schaf, das auf mindestens einer Seite schwarz ist.«

Zaubern mit Mathe

Stell dir vor, du gehst Ende des 18. Jahrhunderts in eine Grundschule. In deiner Klasse sitzen rund hundert Schüler verschiedener Altersstufen. Entsprechend groß ist das Durcheinander und der Lärm. Dein Lehrer vorn am Pult braucht dringend eine Auszeit und gibt allen die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zusammenzuzählen. Damit erhofft er sich eine kleine Ruhepause. Doch schon nach wenigen Minuten meldet sich Carl Friedrich und nennt die richtige Lösung: 5050. Aber wie konnte er so schnell hundert Zahlen addieren?

Die Lösung: Der Neunjährige wandte einen Trick an. Er fasste jeweils zwei Zahlen zusammen, die er zusammenzählte: Die erste und die letzte (1 + 100), die zweite und die vorletzte (2 + 99), die dritte und die drittletzte (3 + 98). Für jedes dieser Paare ergab sich als Summe 101. Und da es 50 solcher Paare gibt, musste das Ergebnis 101 mal 50 gleich 5050 sein. Und das hatte sich der Junge selbst ausgedacht!

Carl Friedrich Gauß wuchs zu einem berühmten Wissenschaftler heran. Schon zu seinen Lebzeiten nannte man ihn den »Princeps Mathematicorum«, den Fürsten der Mathematiker.

Der Kleinplanet Ceres

1801 entdeckte ein Astronom erstmals den Kleinplaneten Ceres. Doch verlor er kurz darauf seine Spur wieder. Erst einige Jahre später berechnete Gauß die Bahn von Ceres so genau, dass die Astronomen den Kleinplaneten mit ihren Teleskopen wieder finden konnten. Gauß verschaffte das mit seinen gerade mal 24 Jahren weltweite Anerkennung.

Immer kommt 3 heraus

Doch auch ohne so genial wie Gauß zu sein, kannst du deine Freunde mit mathematischen Zauberticks überraschen. Einer davon geht so: Du forderst einen Freund oder eine Freundin auf, sich eine Zahl zwischen 1 und 9 auszu-denken. Dann bittest du die Person, die Zahl mit 2 malzunehmen. Jetzt schaust du ihr tief in die Augen und behauptest, du seiest der Zahl schon auf der Spur, aber du hättest sie noch nicht ganz. Dein Freund oder deine Freundin solle das Ergebnis bitte noch mal 5 nehmen. Du blickst deinem Gegenüber wiederum tief in die Augen und forderst es dazu auf, das neue Ergebnis durch die ausgedachte Zahl vom Anfang zu teilen. Jetzt bist du gleich dran. Als letzten Schritt soll er oder sie nur noch 7 abziehen. Triumphierend verkündest du dann: „Das Ergebnis ist 3!“ Garantiert sind nun alle begeistert, wie du das „erraten“ hast. In Wirklichkeit hast du nur ein bisschen Mathematik angewendet.

Carl Friedrich Gauß
1777–1855



Die magische 1089

Bitte jemanden aus deinem Freundeskreis oder deiner Familie, sich eine dreistellige Zahl mit drei verschiedenen Ziffern auszudenken, zum Beispiel 946. Dann soll die Person die Zahl herumdrehen, aus der 946 würde etwa 649, und die kleinere der beiden Zahlen von der Größeren abziehen: $946 - 649 = 297$. Das Ergebnis wird wieder herumdrehed und mit zu sich selbst addiert: $297 + 792 = 1089$. Ist das ausgerechnet, ohne dass du die Rechnungen gesehen hast, verkündest du weise: „Das Ergebnis ist 1089.“ Denn egal mit welcher dreistelligen Zahl man startet, am Ende kommt immer die magische 1089 heraus. Es klingt unglaublich, stimmt aber! Ein anderes Beispiel zum Beweis: 814. Zu rechnen ist $814 - 418 = 396$ und $396 + 693 = 1089$. Probiere es selbst mit anderen Zahlen aus!

Ob ich die Mathematik auf ein paar Dreckklumpen anwende, die wir Planeten nennen, oder auf rein arithmetische Probleme, es bleibt sich gleich, die Letzteren haben nur noch einen höheren Reiz für mich.

Die ausgedachte Zahl hat dein Gegenüber zuerst mal 2 und dann mal 5, insgesamt also mal 10 genommen. Nennen wir die gedachte Zahl x , so ist das Zwischenergebnis $10 \cdot x$. Anschließend wurde es durch die ausgedachte Zahl – durch x – geteilt. Egal, welche Zahl deine Freundin oder dein Freund er sich ausgedacht hat, dabei kommt immer 10 heraus. Davon 7 abgezogen, ergibt 3.

Würfel „erraten“

Solche mathematischen Zauberticks gibt es viele in unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden. Ein anderes Beispiel: Bitte jemanden zu würfeln. Du drehst dich natürlich um, damit du den Würfel nicht sehen kannst. Dann soll die Person die Augenzahl mal 2 nehmen, anschließend 5 addieren und schließlich das Ergebnis mit 5 malnehmen. Nun bittest du sie, ein weiteres Mal zu würfeln, das Würfelergebnis zur erhaltenen Zahl dazu zu zählen und dir das Endergebnis zu nennen. Nach einem langen Augenkontakt nennst du die beiden Würfelergebnisse. Dazu musst du nur vom Endergebnis 25 abziehen. Dann gibt die Zehnerstelle deines Ergebnisses den ersten Würfel wieder und die Einerstellen den zweiten.

Warum das funktioniert? Das erste Würfelergebnis wird mit 2 malgenommen. Anschließend wird 5 dazugezählt und das Ergebnis wiederum mit 5 malgenommen. Das kommt auf dasselbe heraus, wie wenn du die Würfelaugen mit 10 (gleich 2 mal 5) malnimmst und dann 25 (gleich 5 mal 5) dazuzählst. Zählst du dann das zweite Würfelergebnis dazu und ziehst 25 ab, erhältst du eine Zahl, deren Einerstelle den zweiten Würfelwurf wiedergibt. Und die Zehnerstelle ist die Augenzahl des ersten Wurfs.

Der alte Gauß wäre sicher stolz auf dich und deine Tricks gewesen!